用 Delta 方法求随机变量函数的方差 *

基于泰勒展开式，用近似的方法求随机变量函数的方差，这种方法称为 Delta 方法。

函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的泰勒展开式如下：

$$f(x)=f(a)+\frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a)+\frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2+\dots$$

通常有近似形式：

$$f(x)\approx f(a)+f^{'}(a)(x-a).$$

假设有随机变量 X, 期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$，现运用 Delta 方法求随机变量函数 $Y=Y(X)$ 的方差。

$Y=Y(X)$ 在 $X=\mu$ 处的泰勒展开式近似为：

$$Y=Y(X)\approx Y(\mu)+Y^{'}(\mu)(X-\mu).$$

根据方差的性质有：

$$D(Y)\approx D[Y(\mu)+Y^{'}(\mu)(X-\mu)]=[Y^{'}(\mu)]^2\sigma^2,$$

即 $D(Y)\approx[Y^{'}(\mu)]^2\sigma^2$.

* 本文作者张洋